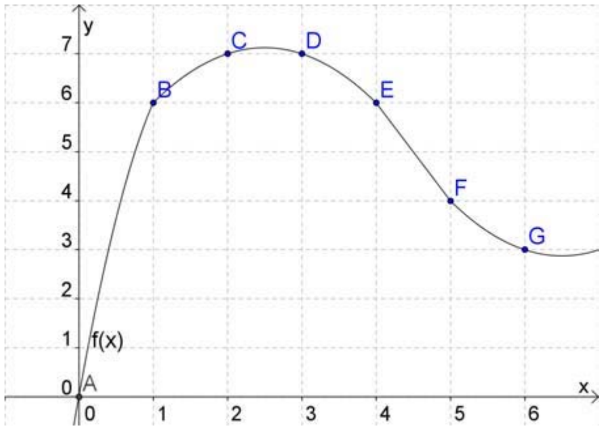
Aufgabe 1

Gegeben ist die nebenstehende Messreihe, aus denen der Graph f(x) extrapoliert wurde. Nur die Punkte A bis G sind gültig!



Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der *x*-Achse im Intervall [0,6] unter Zuhilfenahme der
a) Trapezregel
b) Mittelpunktsregel

Lösung:

$$T=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)\cdot h=(0+6+7+7+6+4+1{,}5)\cdot 1=31{,}5$$

$$M=\left(f(1)+f(3)+f(5)\right)\cdot h=(6+7+4)\cdot 2=34$$

Aufgabe 2

Gegeben ist das Integral $I(x)=\int_1^3\left(-x^2+4x\right)dx$

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals mit Hilfe der Trapezregel und der Mittelpunktsregel. (10 Streifen)

b) Ermitteln Sie jeweils den absoluten und relativen Fehler, indem Sie das bestimmte Integral ausrechnen.

x	y
1	3
1,1	3,19
1,2	3,36
1,3	3,51
1,4	3,64
1,5	3,75
1,6	3,84
1,7	3,91
1,8	3,96
1,9	3,99
2	4
2,1	3,99
…	…
2,9	3,19
3	3

Lösung:

$$T_{10}=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+...+y_9+\frac{1}{2}y_{10}\right)\cdot h=(1{,}5+3{,}36+3{,}64+...+3{,}36+1{,}5)\cdot 0{,}2=7{,}32$$

$$M_{10}=\left(f(1{,}1)+f(1{,}3)+f(1{,}5)+...+f(2{,}9)\right)\cdot h=(3{,}19+3{,}51+3{,}75,+3{,}91+3{,}99+...+3{,}19)\cdot 0{,}2=7{,}34$$

$$I(x)=\int_1^3\left(-x^2+4x\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_1^3=\frac{22}{3}=7{,}\overline{3}$$

absoluter Fehler:

$F_{AT}=7{,}32-7{,}\overline{3}=-0{,}01\overline{3}$ $\qquad F_{AM}=7{,}34-7{,}\overline{3}=0{,}00\overline{6}$

relativer Fehler:

$F_{RT}=\dfrac{7{,}32-7{,}\overline{3}}{7{,}\overline{3}}=-0{,}00\overline{18}$ $\qquad F_{RM}=\dfrac{7{,}34-7{,}\overline{3}}{7{,}\overline{3}}=0{,}00\overline{09}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Integrale durch Anwendung entsprechender Integrationsverfahren.

a) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)dx$

b) $\int_0^4 \left|\sqrt{x}-1\right|dx$

c) $\int \frac{x}{4x+1}dx$

d) $\int \frac{4x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}dx$

e) $\int_1^2 \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}dx$

f) $\int_{-1}^0 x\left|e^x-1\right|dx$

Lösung:

a) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [x\sin(x)+\cos(x)]_0^{\pi} = -2$

b) $\int_0^4 \left|\sqrt{x}-1\right|dx = \int_0^1 -\left(\sqrt{x}-1\right)dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x}-1\right)dx = 2$

c) $\int \frac{x}{4x+1}dx \qquad u = 4x+1$

$= \int \frac{u-1}{4u}\frac{du}{4} = \frac{1}{16}\left(\int du - \int \frac{1}{u}du\right) = \frac{1}{16}\left(u - \ln|u|\right) + C = \frac{1}{16}\left((4x+1) - \ln|4x+1|\right) + C$

d) $\int \frac{4x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}dx \qquad u = x^2+1 \qquad u-2 = x^2-1 \qquad \frac{du}{dx} = 2x$

$= \int \frac{4x(u-2)}{u}\frac{du}{2x} = 2\int \frac{u-2}{u}du = \int 2 - \frac{4}{u}du = 2x^2 - 4\ln\left|x^2+1\right| + C$

e) Substitution mit $u = \frac{\pi}{x}$

$\int_1^2 \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}dx \qquad u = \frac{\pi}{x} = \pi x^{-1} \qquad \frac{du}{dx} = -\pi x^{-2} \qquad dx = -\frac{du \cdot x^2}{\pi}$

$\text{Grenzen - OG}: u = \frac{\pi}{2} \qquad UG: u = \pi$

$= -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{x^2} \cdot \frac{du \cdot x^2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u)du = \frac{1}{\pi}\sin(u)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}(0-1) = \underline{\underline{-\frac{1}{\pi}}}$

f) da $e^x - 1$ im Bereich von -1 bis 0 negativ ist werden die Vorzeichen gedreht.

$\int_{-1}^0 x\left|e^x-1\right|dx = \int_{-1}^0 x\left(1-e^x\right)dx \qquad u = x \quad u' = 1 \qquad v = x - e^x \quad v' = 1 - e^x$

$= x(x-e^x)\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 1\left(x-e^x\right)dx = x^2 - xe^x\Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \left(e^x - x\right)dx = x^2 - xe^x + e^x - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0$

$= 0 - 0 + e^0 - 0 - \left(1 + e^{-1} + e^{-1} - \frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{2}{e}}}$