Aufgabe 1: Integrationsverfahren

Lösen Sie die folgenden Integrale mit einem geeigneten Verfahren. Überprüfen Sie vorher, ob es sich bei den bestimmten Integralen um uneigentliche Integrale handelt.

a) $\int x^3\sqrt{2x^4-5}\cdot dx$

Lösung:

$$u = 2x^4 - 5 \qquad \frac{du}{dx} = 8x^3 \qquad dx = \frac{1}{8x^3}du$$

$$\int x^3\sqrt{u}\,\frac{du}{8x^3} = \frac{1}{8}\int u^{\frac{1}{2}}\cdot du = = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{12}\left(2x^4-5\right)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

c) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Lösung:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\mapsto 0}\int_t^3 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\mapsto 0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_t^3 = \lim_{t\mapsto 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{3}$$

g) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Lösung:

$\mathit{Nullstellen\ \ Nenner}: 4 - x^2 = 0 \quad x = \pm 2$ Integralgrenze!

$$\lim_{t\mapsto 2}\int_0^t \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$\lim_{t\mapsto 2}\int_0^t \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad u = 4 - x^2 \qquad \frac{du}{dx} = -2x \qquad dx = \frac{du}{-2x}$$

$$= \lim_{t\mapsto 2}\int \frac{x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{-2x} = \lim_{t\mapsto 2} -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = \lim_{t\mapsto 2} -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \lim_{t\mapsto 2} -\frac{1}{2}\left(2u^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^t = \lim_{t\mapsto 2} -\sqrt{4-x^2}\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\mapsto 2} -\sqrt{4-t^2} + \sqrt{4} = \sqrt{0} + \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$

Aufgabe 2: Flächen- und Volumenberechnung

a) Die Fläche zwischen der Kurve $y = x^3 - 4x$ und der x-Achse in den Grenzen von 0 bis 2 ist durch eine senkrechte Gerade $x = c$ zu halbieren. Berechnen Sie c.

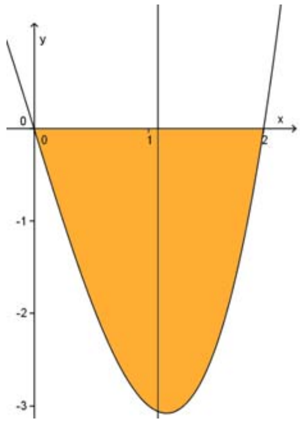
Lösung:

$$\int_0^c \left(x^3 - 4x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{4} - 8\right) = -2$$

$$\int_0^c \left(x^3 - 4x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^c = \frac{c^4}{4} - 2c^2 = -2$$

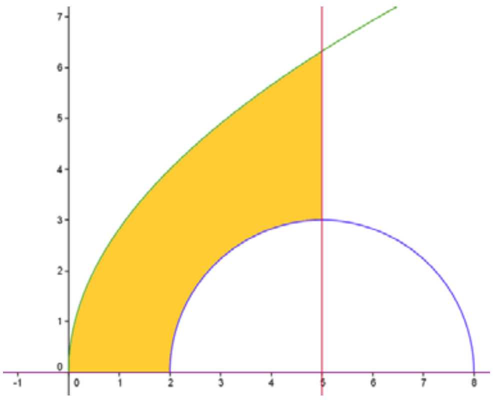
$$c^4 - 8c^2 + 8 = 0 \Rightarrow \qquad \underline{\underline{c = 1{,}082}}$$



b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Fläche zwischen den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{8x}$, $(x-5)^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ und $x = 5$, um die x-Achse entsteht. Erstellen Sie zuerst eine Skizze!

Lösung:

Skizze:



$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$

$$V_1 = \pi\int_0^5 \left(\sqrt{8x}\right)^2 dx = \pi\int_0^5 8x \cdot dx = \pi 4x^2\Big|_0^5 = 100\pi$$

$$V_2 = \pi\int_2^5 9 - (x-5)^2 dx = \pi\int_2^5 \left(-x^2 + 10x - 16\right)dx = \pi\left(-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 16x\right)\Bigg|_2^5$$

$$= \pi\left(-\frac{125}{3} + 125 - 80 - \left(-\frac{8}{3} + 20 - 32\right)\right) = 18\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 100\pi - 18\pi = \underline{\underline{82\pi}}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Grenzwerte:

Lösungen:

a) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{2}{n-1} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}} = \frac{0}{1-0} = 0$

b) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{0+0} = \infty$

c) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} 10^{-n} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{10^5 n}{n^5} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{10^5 \frac{n}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5}} = \frac{0}{1} = 0$

e) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{2-n^3}{10n^2+n} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{2}{n^3}-\frac{n^3}{n^3}}{\frac{10n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}} = \frac{0-1}{0+0} = -\infty$

f) $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{(n-5)^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{n^2-10n+25}{n^2+1} = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{10n}{n^2}+\frac{25}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0-0}{1+0} = 1$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Formel der Folge:

a) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$

b) $-2; 4; -6; 8; -10;$

c) $\frac{2}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; \frac{5}{8}; \frac{6}{10}$

Lösungen:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

b) $a_n = 2n(-1)^n$

c) $a_n = \frac{n+1}{2n}$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $R=\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{24}+\frac{81}{64}+...$

Lösung:

$$a_n=\frac{3^n}{n\cdot 2^n}\qquad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{3\cdot 3^n\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{3\cdot n}{(n+1)\cdot 2}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{3}{2}\cdot\left|\frac{n}{n+1}\right|$$

$$=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{3}{2}\cdot\left|\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{3}{2}\cdot\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|=\frac{3}{2}>1\quad\Rightarrow\qquad \textit{divergent}$$

b) $R=\frac{1}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{16}{4!}+...$

Lösung:

$$a_n=\frac{n^2}{n!}\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{(n+1)^2\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^2}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot n^2}=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0<1\quad\Rightarrow\qquad \textit{konvergent}$$

Zusatz:

Aufgabe 1: Integrationsverfahren

Lösen Sie die folgenden Integrale mit einem geeigneten Verfahren. Überprüfen Sie vorher, ob es sich bei den bestimmten Integralen um uneigentliche Integrale handelt.

b) $\int x\cdot\sin(x^2)dx$

Lösung:

$$\int x\cdot\sin(x^2)dx\qquad u=x^2\qquad \frac{du}{dx}=2x\qquad dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int x\cdot\sin(x^2)\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int\sin(u)du=-\frac{1}{2}\cos(u)+C\quad=\quad\underline{\underline{-\frac{1}{2}\cos(x^2)+C}}$$

d) $\int_0^5 \left(2x^3 - |x-2|\right)dx$

Lösung:

$$\int_0^5 \left(2x^3 - |x-2|\right)dx \qquad x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=2$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 + (x-2)\right)dx + \int_2^5 \left(2x^3 - (x-2)\right)dx = \int_0^2 \left(2x^3 + x - 2\right)dx + \int_2^5 \left(2x^3 - x + 2\right)dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_0^2 + \frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_2^5 = \frac{2^4}{2} + \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2 - 0 + \frac{5^4}{2} - \frac{5^2}{2} + 2\cdot 5 - \left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right)$$

$$= 8 + 2 - 4 + \frac{625}{2} - \frac{25}{2} + 10 - 8 + 2 - 4 = \underline{\underline{306}}$$

e) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}dx$

Lösung:

$$u = \ln(x) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad dx = xdu$$

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\, dx = \int_e^\infty \frac{1}{x(u)^2}\, xdu = \int_e^\infty \frac{1}{(u)^2}\, du$$

$$= \lim_{t\mapsto\infty} \int_e^t \frac{1}{(u)^2}\, du = \lim_{t\mapsto\infty} \int_e^t u^{-2}\, du = \lim_{t\mapsto\infty} \left(-u^{-1}\right)\Big|_e^t = \lim_{t\mapsto\infty} \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_e^t$$

Vorm Einsetzen der Grenzen rücksubstituierten!

$$\lim_{t\mapsto\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\Big|_e^t = \lim_{t\mapsto\infty} \left(-\frac{1}{\ln(t)}\right) + \frac{1}{\ln(e)} = \frac{-1}{\infty} + 1 = \underline{\underline{1}}$$

f) $\int x^2 \cdot \sin(x)dx$

Lösung:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)dx \qquad u = -\cos(x) \qquad u' = \sin(x) \qquad v = x^2 \qquad v' = 2x$$

$-x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)dx$ noch mal partiell Ableiten:

$$u = \sin(x) \qquad u' = \cos(x) \qquad v = 2x \qquad v' = 2$$

$$-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)dx = \underline{\underline{-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C}}$$

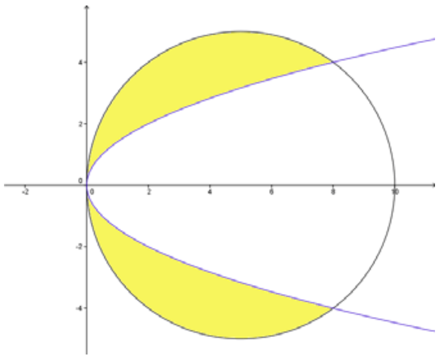
Aufgabe 2: Flächen- und Volumenberechnung

c) Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der von den Kurven $(x-5)^2 + y^2 = 25$ und $y^2 = 2x$ eingeschlossenen Fläche um die x-Achse entsteht.
Erstellen Sie zuerst eine Skizze und berechnen Sie **beide** Möglichkeiten.

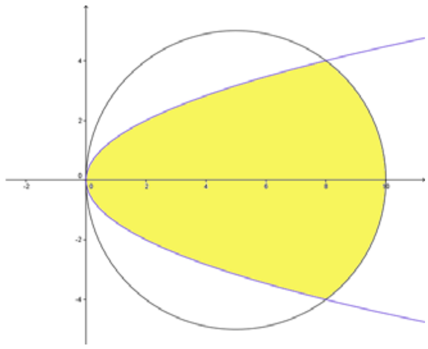
Lösung:

Skizzen:

a



b



$y^2 = 25-(x-5)^2 \qquad y^2 = 2x$

$$V_{ax} = \pi\int_0^8 \left(25-(x-5)^2\right)dx - \pi\int_0^8 2x\,dx = \pi\int_0^8 \left(25-x^2+10x-25-2x\right)dx = \pi\int_0^8 \left(-x^2+8x\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_0^8 = \pi\left(\frac{-512}{3}+256\right) = \pi\left(\frac{-512}{3}+\frac{768}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{256}{3}\pi}}$$

$$V_{bx} = \pi\int_0^8 2x\,dx + \pi\int_8^{10}\left(25-(x-5)^2\right)dx = \pi\int_0^8 2x\,dx + \pi\int_8^{10}\left(25-\left(x^2-10x+25\right)\right)dx$$

$$= \pi\int_0^8 2x\,dx + \pi\int_8^{10}\left(-x^2+10x\right)dx = \pi\left[x^2\right]_0^8 + \pi\left[\frac{-x^3}{3}+5x\right]_8^{10}$$

$$= \pi(64) + \pi\left(\left(\frac{-1000}{3}+500\right)-\left(\frac{-512}{3}+320\right)\right) = \pi\left(64+500-320-\frac{1000}{3}+\frac{512}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{244}{3}\pi}}$$

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen einer Pyramide der Höhe h, deren Grundfläche ein Rechteck mit der Seitenlänge 2a und a ist.

Zur Kontrolle: Volumen Pyramide: (Grundfläche x Höhe / drei) $V = \frac{a \cdot 2a \cdot h}{3} = \frac{2}{3}a^2 h$

<table>
<tr><td>

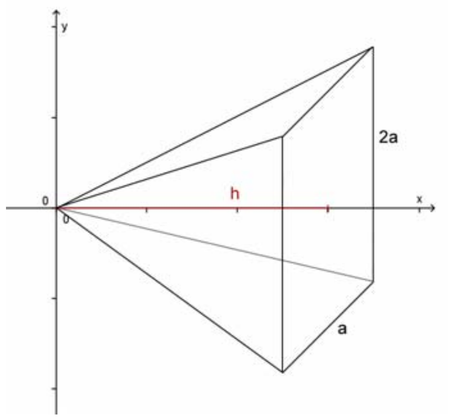
Lösung:

Pyramide so in ein Koordinatensystem legen, dass die Spitze im Ursprung liegt.

Grundfläche der Pyramide: $A = 2a^2$

Diese Fläche wird zum Ursprung hin immer kleiner und muss nun in Abhängigkeit von x ausgedrückt werden.

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Seitenansicht:

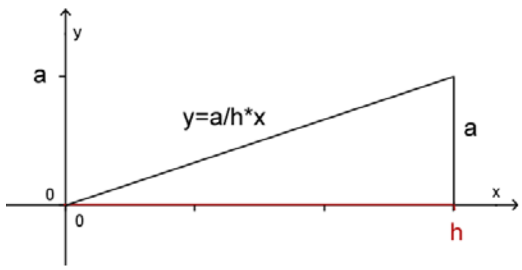
Die Geradengleichung lautet $y = \frac{a}{h}x$

Die Flächen haben somit die Gleichung:
$A(x) = 2\left(\frac{a}{h}x\right)^2 = 2\frac{a^2}{h^2}x^2$

Diese einzelnen Flächen summiert man über ein Integral auf:

$V = \int_0^h 2\frac{a^2}{h^2}x^2 \cdot dx = \left(2\frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \underline{\underline{\frac{2}{3}a^2 h}}$

</td><td>



</td></tr>
</table>