Aufgabe 1

Welche der folgenden Integrale sind uneigentlich und warum?

a) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx$ Nullstelle bei x = 0,5, liegt aber nicht innerhalb der Integralgrenzen

b) $\int_0^1 \frac{1}{2x-1}dx$ Nullstelle bei x = 0,5, liegt innerhalb der Integralgrenzen, darum uneigentlich

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx$ uneigentliches Integral, da unendliches Intervall

d) $\int_1^2 \ln(x-1)dx$ ist uneigentlich, da Polstelle bei 1

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale und geben Sie an, welche konvergent und welche divergent sind.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx \qquad NR: \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

$$= \lim_{t\mapsto-\infty}\int_t^0 \frac{x}{x^2+1}dx + \lim_{t\mapsto\infty}\int_0^t \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\lim_{t\mapsto-\infty}\ln\left|x^2+1\right|\right|_t^0 + \left|\lim_{t\mapsto-\infty}\ln\left|x^2+1\right|\right|_0^t\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\infty+\infty) = \infty \Rightarrow \text{divergent}$$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-|x|}dx = 2\cdot\lim_{t\mapsto\infty}\int_0^t e^{-x}dx = -2\cdot\lim_{t\mapsto\infty} e^{-x}\Big|_0^t = -2\cdot\lim_{t\mapsto\infty} e^{-t} + 2\cdot e^0 = 0+2 = 2$$

c) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Lösung:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\mapsto0}\int_t^3 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\mapsto0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_t^3 = \lim_{t\mapsto0} 2\sqrt{x}\Big|_t^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{3}$$

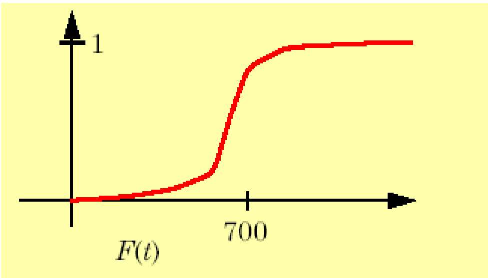
Aufgabe 3

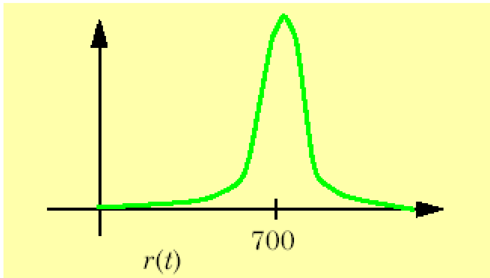
Eine Firma stellt Glühlampen her, die ca. 700 Stunden brennen. Darunter gibt es natürlich immer einige, die schneller ausbrennen und einige, die länger durchhalten. Sei F(t) der Anteil der Glühbirnen, die innerhalb eines Zeitraums [0,t) ausbrennen. F(t) ist eine Zahl zwischen 0 und 1.
a) Skizzieren Sie einen plausiblen Verlauf des Graphen F(t).
b) Erklären Sie die Bedeutung der Ableitung r(t) = F'(t) und skizzieren Sie einen plausiblen Verlauf des Graphen r(t).

c) Welchen Wert hat das uneigentliche Integral $\int_0^\infty r(t)\,dt$ und warum?

Aufgabe 3

a)





b) Der Wert $r(t) = F'(t)$ bezeichnet die relative Anzahl der Glühbirnen, die genau nach t Stunden ausbrennen.

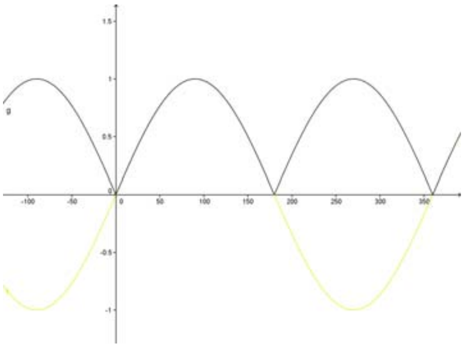
c) Das Integral $\int_0^\infty r(t)dt$ hat den Wert 1, denn es bezeichnet die relative Anzahl *aller* Glühbirnen (Aufsummieren von $r(t)$).

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\, dx$

Lösung:

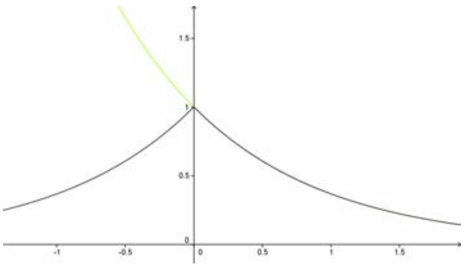


$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx$$

$$= \left| -2\cos(x) \right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2(0-1) = 2$$

b) $\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\, dx$

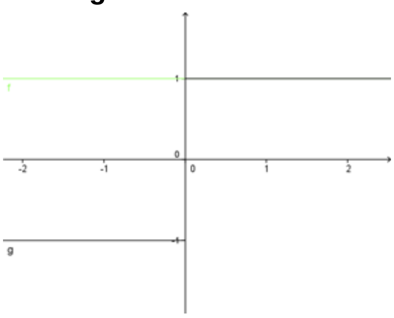
Lösung:



$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\, dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x}\, dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^1 \approx 1.264$$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|}\, dx$

Lösung:



$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|} dx = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \left(\int_{-1}^{\varepsilon} -1\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} 1\, dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \mapsto 0} -x\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \mapsto 0} x\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} (-\varepsilon - 1 + 1 - \varepsilon) = \underline{\underline{0}}$$

d) $\int_0^1 f(x)\cdot\sin(x)\,dx \qquad mit \quad f(x)=\begin{cases}3 & für\ 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & sonst\end{cases}$

Lösung:

$$\int_0^1 f(x)\cdot\sin(x)\,dx \qquad mit \quad f(x)=\begin{cases}3 & für\ 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & sonst\end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\cdot\sin(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 3\cdot\sin(x)\,dx = \left[-3\cos(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}367$$