Formeln für parametrisierte Funktionen

Ableitungen:	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$	$y'' = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \ddot{x}\ \dot{y}}{(\dot{x})^3}$
waagerechte Tangente:	$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$	
Fläche:	$A = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x} \cdot dt$	
Bogenlänge:	$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt$	
Rotationsvolumen:	$V_x = \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2\ \dot{x}\ dt$	$V_y = \int_{t_1}^{t_2} (x(t))^2\ \dot{y}\ dt$

Aufgabe 1: Integrationsverfahren

Lösen Sie die folgenden Integrale. (SS2015)

a) $\int x^3 \cdot \ln(x) dx$ b) $\int \frac{x}{4x+1} \cdot dx$ c) $\int_0^6 \frac{1}{(3-x)^2} dx$

Aufgabe 2: Parametrisierte Funktionen

2.1 Bestimmen Sie die Parameterform der Kurve eines Teilchens, das sich entlang des Kreises $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ in der folgenden Weise bewegt:

a) Dreimal um den Kreis, beginnend bei (2; 1)

b) Halb um den Kreis, beginnend bei (0; 3)

2.2 Gegeben ist die Parameterfunktion $y = t^3 - 3t$ und $x = t^2$ (SS06)

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie, für welche Werte von t der Punkt (3; 0) durchlaufen wird.

c) Berechnen Sie die Punkte, an denen die Kurve eine horizontale Tangente aufweist.

2.3 Gegeben ist folgende Funktion in Parameterform $y = 2\cos(t) + 2$, $x = 2\sin(t)$ mit $-\pi \leq t < \pi$

a) Skizzieren Sie die Kurve, den Startpunkt und die Durchlaufrichtung

b) Berechnen Sie die von der Kurve eingeschlossene Fläche. (WS05/06)

2.4 Gegeben ist folgende Funktion $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ (SS04)

a) Skizzieren Sie die Kurve.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung in Parameterform.

c) Berechnen Sie die Tangentensteigung an den Schnittpunkten mit der x-Achse

2.5 Für die Kurve der Funktion mit den Gleichungen $x = \cos(t)$ $y = \sin^2(t)$ $(0 \leq t \leq \pi)$ sind die Extremwerte zu finden.

Aufgabe 3: Flächen und Volumen

Die folgenden Kurven schließen eine Fläche ein: $y = x^2 \; mit \;\; x \geq 0, \; x = 1 \; und \;\; y = 4$ (WS0708)

a) Skizzieren Sie die Kurve und die eingeschlossene Fläche

b) Berechnen sie das Volumen, wenn die Fläche um die Gerade $x = 1$ rotiert.

c) Berechnen sie das Volumen, wenn die Fläche um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 4: Folgen und Reihen

Entwickeln Sie $f(x) = e^{-x}$ als MacLaurin-Reihe. (SS2015)

a) Ermitteln Sie die Reihe über die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$.

b) Bestimmen Sie die Reihe für *f(x)* aus der bekannten Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

c) Ermitteln Sie den Konvergenzradius *R* der Reihe.

Lösungen:

1a) $\frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$ b) $\frac{1}{16}\left((4x+1) - \ln|4x+1|\right) + C$ c) ∞

2.1b) $\underline{\underline{t_1 = \sqrt{3}}}$ $\underline{\underline{t_2 = -\sqrt{3}}}$ c) $\underline{\underline{P_1(1;-2)}}$ $\underline{\underline{P_2(1;2)}}$ 2.2b) $\underline{\underline{4\pi}}$

2.3b) $\underline{\underline{x = 1 + \sqrt{2}\cos(t)}}$ $\underline{\underline{y = 1 + \sqrt{2}\sin(t)}}$ c) $y'_{\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \underline{\underline{-1}}$ $y'_{\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = \underline{\underline{+1}}$

2.4) $t_{\max} = \frac{\pi}{2}$ 3b) $V_y = \frac{7}{6}\pi$ 3c) $V_x = \frac{7}{15}\pi$ 4ab) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ c) $R = \infty$