Aufgabe 1

Bestimmen Sie die x-Werte für die die folgenden Reihen sicher konvergieren!

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

Lösung:

a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\frac{x^n}{x^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| \qquad \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad konv.\ für \quad x < -1 \vee x > 1$

b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{(n)!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad konv.\ für \quad x \in R$

c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| \qquad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad konv.\ für \quad -1 < x < 1$

d) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+2}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad konv.\ für \quad x \in R$

e)
$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad a_n = \frac{x^{2n}}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot n}{(n+1)x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2x^{2n}\cdot n}{(n+1)x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2\cdot n}{(n+1)}\right| = \left|x^2\right| \qquad \left|x^2\right| < 1 \qquad \Rightarrow \text{konv. für } -1 < x < 1$$

f)
$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \qquad a_n = \frac{x^{2n}}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot n!}{(n+1)!\,x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2x^{2n}\cdot n!}{(n+1)n!\,x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^2}{(n+1)}\right| = 0 \qquad \Rightarrow \text{konv. für } x \in R$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Reihe

a) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+2)x^n$

Lösung:

$$Kovergenzradius: \qquad \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$a_n = 2^n(n+2)x^n \qquad a_{n+1} = 2^{n+1}(n+3)x^{n+1}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+3)x^{n+1}}{2^n(n+2)x^n}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2\cdot 2^n(n+3)x\cdot x^n}{2^n(n+2)x^n}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2(n+3)x}{(n+2)}\right| \overset{DLH}{=} \lim_{n\mapsto\infty}|2x|$$

$$|2x| < 1 \qquad |x| < \frac{1}{2} \qquad x \in \left(\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{3n}}{2}$

Lösung:

$$\textit{Kovergenzradius:} \qquad \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$a_n = \frac{3^n x^{3n}}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} x^{3(n+1)}}{2} = \frac{3^{n+1} x^{3n+3}}{2}$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2\cdot 3^{n+1} x^{3n+3}}{2\cdot 3^n x^{3n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2\cdot 3\cdot 3^n x^3 x^{3n}}{2\cdot 3^n x^{3n}}\right| = \left|3x^3\right|$$

$$\left|3x^3\right| < 1 \qquad \left|x^3\right| < \frac{1}{3} \qquad |x| < \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \qquad x \in (-0{,}69;0{,}69)$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$

Lösung:

Konvergenz wenn $\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}\cdot 4^n}{4^{n+1}\cdot x^{2n}}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot 4^n}{4\cdot 4^n\cdot x^{2n}}\right| = \left|\frac{x^2}{4}\right| \qquad \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1 \quad \left|x^2\right| < 4 \qquad x \in (-2;\ 2)$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n\cdot\ln(n)}$ für $x \in (-4;4)$ konvergiert.

Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n\cdot\ln(n)} \qquad \textit{Quotientenkriterium:} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 4^n\cdot\ln(n)}{4^{n+1}\cdot\ln(n+1)\cdot x^n}\right| = \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x\cdot\ln(n)}{4\cdot\ln(n+1)}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|\cdot \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| \overset{DLH}{=} \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| \overset{DLH}{=} \lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

$$\left|\frac{x}{4}\right|\cdot\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|\cdot 1 \qquad \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{|x| < 4 \qquad \Rightarrow \qquad x \in (-4;4)}}$$

Aufgabe 4

Ermitteln Sie die MacLaurin-Reihe für

a) $f(x) = \sin x^2$ b) $f(x) = \cos x^2$ c) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

Lösung:

a) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$

b) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

c) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad \cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n}}{(2n)!}$

Aufgabe 5

Gesucht ist die MacLaurinsche Reihendarstellung von

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots}$$

a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Lösung:

$f(x) = (1+x)^{-2}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -2(1+x)^{-3}$ $\qquad f'(0) = -2$

$f''(x) = 6(1+x)^{-4}$ $\qquad f''(0) = 6$

$f'''(x) = -24(1+x)^{-5}$ $\qquad f'''(0) = -24$

$f^{(4)}(x) = 120(1+x)^{-6}$ $\qquad f^{(4)}(0) = 120$

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

Lösung:

$f(x) = \sqrt{1+x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\qquad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ $\qquad f''(0) = \frac{-1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$ $\qquad f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16\sqrt{(1+x)^7}}$ $\qquad f^{(4)}(0) = \frac{-15}{16}$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

Aufgabe 6

a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$ für $x\in(-1;1)$ konvergiert. (SS07)

b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ (SS04)

c) Ermitteln Sie $\int x\cdot e^{x^3}dx$ als MacLaurin-Reihe mit Hilfe einer bekannten Reihe. (SS07)

d) Ermitteln Sie $f(x)=x\cos(x^2)$ als MacLaurin-Reihe unter Zuhilfenahme einer bekannten Reihe und vereinfachen Sie diesen Ausdruck so weit wie möglich. (WS07/08)

e) Ermitteln Sie für die Funktion aus d) die erste Ableitung $f'(x)$. (WS07/08)

f) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Reihe $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$. (SS08)

g) Berechnen Sie $\int g(x)dx$ als Reihe. (SS08)

Lösung:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$ Quotientenkriterium: $\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

$a_n=\frac{x^n}{\ln(n)}$ $a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x^{n+1}\ln(n)}{\ln(n+1)x^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{x\ln(n)}{\ln(n+1)}\right|=|x|\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$NR:\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)\Rightarrow\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow DLH \qquad \lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)=\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)=1$$

$$|x|\lim_{n\mapsto\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)=|x| \qquad |x|<1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{-1<x<1}}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ Quotientenkriterium: $\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

$a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$ $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!\cdot2^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2\cdot2^n(n+1)!}{(n+2)(n+1)!\cdot2^n}\right|=\lim_{n\mapsto\infty}\left|\frac{2}{(n+2)}\right|=0 \qquad 0<1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{konvergent}$$

c)
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^3\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} \qquad xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$$

$$\int x \cdot e^{x^3}\,dx = \underbrace{\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{3n+1}}{n!}}_{\Downarrow}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \cdot \frac{x^{3n+2}}{n!} + C$$

$$Erklärung: \int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

d)
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

$$x\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x \cdot x^{4n}}{(2n)!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}}}$$

e)
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (4n+1) \cdot \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(4n+1)}{(2n)!} \cdot x^{4n}}}$$

f)
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} \qquad \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$a_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \frac{x^{n+2} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^{n+1}} \right| = \lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{x}{(n+1)} \right| = 0 \qquad \Rightarrow$$

Konvergenzradius ist $\underline{\underline{R = \infty}}$

g)
$$\int g(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} + C}}$$

Bekannte Reihen:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$