Aufgabe 1: Integrationsverfahren

Lösen Sie die folgenden Integrale. (SS2015)

a) $\int x^3 \cdot \ln(x) dx$ b) $\int \frac{x}{4x+1} \cdot dx$ c) $\int_0^6 \frac{1}{(3-x)^2} dx$

Lösung:

a) $\int x^3 \cdot \ln(x) dx$ Partielle Integration

$u = \frac{1}{4}x^4 \qquad u' = x^3 \qquad v = \ln(x) \qquad v' = \frac{1}{x}$

$$\int x^3 \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$$

b) $\int \frac{x}{4x+1} \cdot dx$ Substitution mit $u = 4x+1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u-1}{4}$

$$\int \frac{x}{4x+1} dx = \int \frac{u-1}{4u}\frac{du}{4} = \int \frac{1}{16} du - \int \frac{1}{16u} du = \frac{1}{16}\left(u - \ln|u|\right) + C = \frac{1}{16}\left((4x+1) - \ln|4x+1|\right) + C$$

c) $\int_0^6 \frac{1}{(3-x)^2} dx$ uneigentliches Integral!

$$I = \int_0^6 \frac{1}{(3-x)^2} dx = \lim_{t \to 3^-} \int_0^t \frac{1}{(3-x)^2} dx + \lim_{t \to 3^+} \int_t^6 \frac{1}{(3-x)^2} dx$$

$$I = \lim_{t \to 3^-} \left[\frac{1}{3-x}\right]_0^t + \lim_{t \to 3^+} \left[\frac{1}{3-x}\right]_t^6 = \lim_{t \to 3^-} \frac{1}{3-t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \lim_{t \to 3^+} \frac{1}{3-t} = \infty - \frac{2}{3} + \infty = \infty$$

Aufgabe 2: Parametrisierte Funktionen

2.1 Bestimmen Sie die Parameterform der Kurve eines Teilchens, das sich entlang des Kreises $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ in der folgenden Weise bewegt:

a) Dreimal um den Kreis, beginnend bei (2; 1)

b) Halb um den Kreis, beginnend bei (0; 3)

Lösung:

Hauptform eines Kreises: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ Mittelpunkt M = $(x_0; y_0)$; Radius = r

Parameterform des Kreises: $x = x_0 + r \cdot \cos(t); \qquad y = y_0 + r \cdot \sin(t) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$

a) $x = 2 \cdot \cos(t); \quad y = 1 + 2 \cdot \sin(t) \qquad (0 \le t \le 6\pi)$

b) $x = 2 \cdot \cos(t); \quad y = 1 + 2 \cdot \sin(t) \qquad (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3}{2}\pi)$

2.2 Gegeben ist die Parameterfunktion $y = t^3 - 3t$ und $x = t^2$ (SS06)

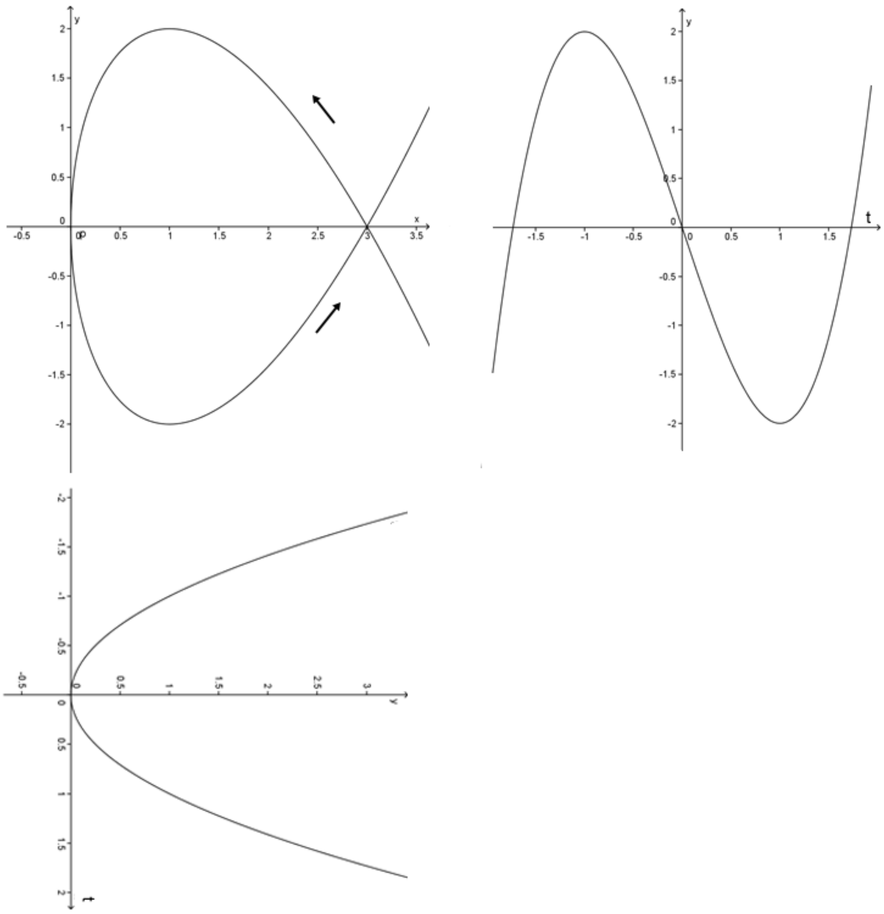
a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie, für welche Werte von t der Punkt (3; 0) durchlaufen wird.

c) Berechnen Sie die Punkte, an denen die Kurve eine horizontale Tangente aufweist.

Lösung:

a)



b)

$x = t^2$ $\qquad\qquad P(3;0)$

$3 = t^2 \quad \Rightarrow t_{x1,x2} = \pm\sqrt{3}$

$y = t^3 - 3t$

$0 = t^3 - 3t \qquad \Rightarrow t_{y1} = 0$

$t^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow t_{y2,y3} = \pm\sqrt{3} \quad \underline{\underline{t_1 = \sqrt{3}}} \quad \underline{\underline{t_2 = -\sqrt{3}}}$

c)

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0 \qquad y' = \frac{3t^2 - 3}{2t} = 0 \qquad t \neq 0$

$3t^2 - 3 = 0 \qquad 3t^2 = 3 \quad t^2 = 1 \qquad t_{1,2} = \pm 1$

$\underline{\underline{P_1(1;-2)}} \qquad \underline{\underline{P_2(1;2)}}$

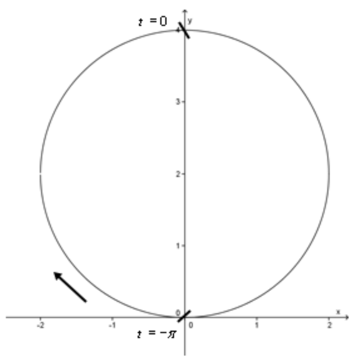
2.3 Gegeben ist folgende Funktion in Parameterform $y = 2\cos(t) + 2$, $x = 2\sin(t)$ mit $-\pi \le t < \pi$

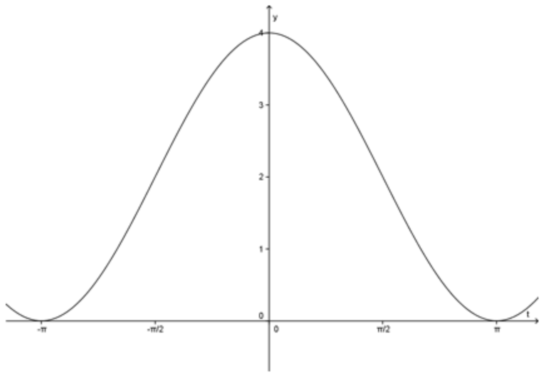
a) Skizzieren Sie die Kurve, den Startpunkt und die Durchlaufrichtung, wenn t den Definitionsbereich vom kleinsten zum größten Wert durchläuft

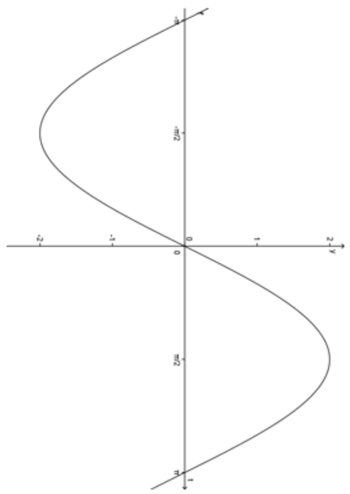
b) Berechnen Sie die von der Kurve eingeschlossene Fläche. (WS05/06)

Lösung:

a) Kreis mit Radius r=2 und Mittelpunkt M(0; 2)







b) $F = \int_a^b y\,dx \qquad y = 2\cos(t) + 2 \quad x = 2\sin(t) \qquad \frac{dx}{dt} = 2\cos(t) \qquad a = -\pi;\ b = \pi$

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} \big(2\cos(t) + 2\big) 2\cos(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(4\cos^2(t) + 4\cos(t)\big)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(2 + 2\cos(2t) + 4\cos(t)\big)dt$$

$$= \big[2t + \sin(2t) + 4\sin(t)\big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi + 0 + 0 + 2\pi + 0 + 0 = \underline{\underline{4\pi}}$$

2.4 Gegeben ist folgende Funktion $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ (SS04)

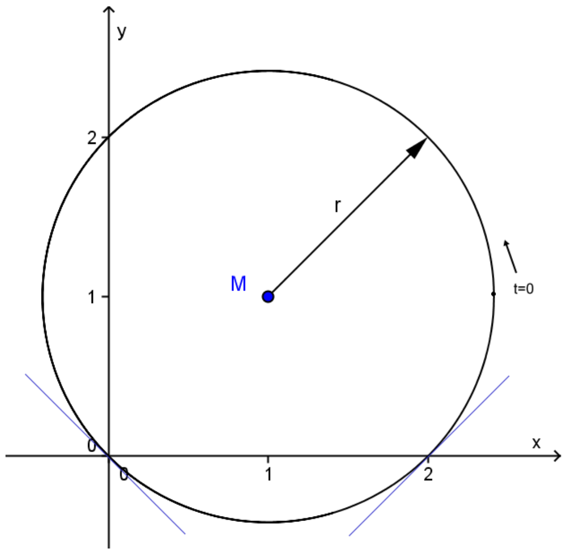
a) Skizzieren Sie die Kurve.

b) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung in Parameterform.

c) Berechnen Sie die Tangentensteigung an den Schnittpunkten mit der x-Achse

Lösung:

a)



b) Kreis: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Parameterform:

$x=x_0+r\cos(t)$

$y=y_0+r\sin(t)$

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

$x_0=1 \qquad y_0=1 \qquad r=\sqrt{2}$

$\underline{\underline{x=1+\sqrt{2}\cos(t)}} \qquad \underline{\underline{y=1+\sqrt{2}\sin(t)}}$

c) Schnittpunkt mit x-Achse: $y=0$

$y=1+\sqrt{2}\sin(t)=0$

$\sin(t)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t=225^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{5\pi}{4} \qquad \wedge \qquad t=315^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{7\pi}{4}$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\sqrt{2}\cos(t)}{-\sqrt{2}\sin(t)}=\frac{-\cos(t)}{\sin(t)}=-\cot(t)$$

$$y'_{\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=-\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\underline{\underline{-1}}$$

$$y'_{\left(\frac{7\pi}{4}\right)}=-\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\underline{\underline{+1}}$$

2.5 Für die Kurve der Funktion mit den Gleichungen $x = \cos(t) \qquad y = \sin^2(t) \qquad (0 \le t \le \pi)$ sind die Extremwerte zu finden.

Hinweis: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \ddot{x}\ \dot{y}}{(\dot{x})^3}$

Lösung:

$$x = \cos(t) \qquad y = \sin^2(t) \qquad (0 \le t \le \pi)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sin(t) \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2\cos(t)\sin(t)$$

$$\ddot{x} = -\cos(t) \qquad \ddot{y} = -2\sin^2(t) - 2\cos^2(t)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2\cos(t)\sin(t)}{-\sin(t)} = -2\cos(t)$$

$$y' = 0 \quad -2\cos(t) = 0 \quad \cos(t) = 0 \qquad t = \frac{\pi}{2}$$

$$y'' = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \ddot{x}\ \dot{y}}{(\dot{x})^3} = -1$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow Maximum$$

Aufgabe 3: Flächen und Volumen

Die folgenden Kurven schließen eine Fläche ein: $y = x^2 \; mit \; x \geq 0$, $x = 1$ und $y = 4$ (WS0708)

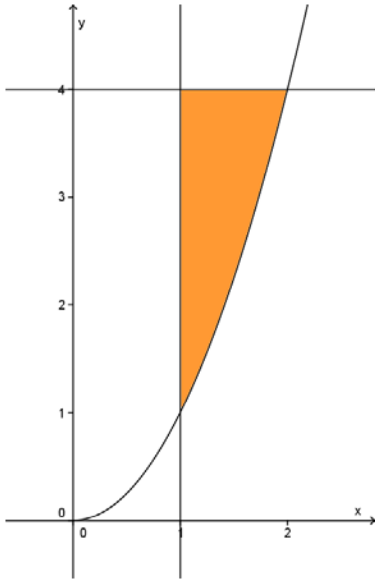
a) Skizzieren Sie die Kurve und die eingeschlossene Fläche

b) Berechnen sie das Volumen, wenn die Fläche um die Gerade $x = 1$ rotiert.

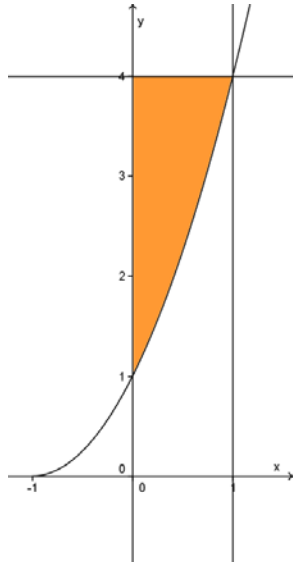
c) Berechnen sie das Volumen, wenn die Fläche um die x-Achse rotiert.

Lösung:

a)



b) Rotation von x^2 um die Gerade $x = 1$ entspricht der Rotation von $(x+1)^2$ um die y-Achse.



$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$y = (x+1)^2 \qquad \sqrt{y} = x + 1$$

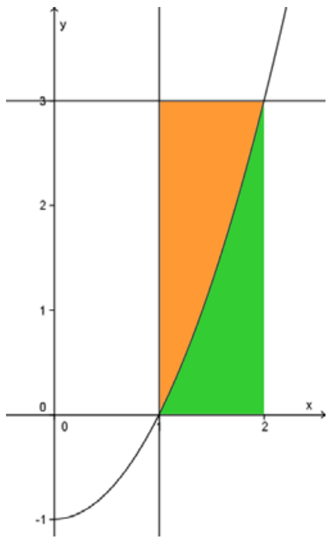
$$x = \sqrt{y} - 1$$

$$x^2 = \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = y - 2\sqrt{y} + 1$$

$$V_y = \pi \int_1^4 \left(y - 2\sqrt{y} + 1\right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} + y \right]_1^4 = \underline{\underline{\frac{7}{6}\pi}}$$

c)



Verschieben der Funktion um 1 nach unten ergibt $y = x^2 - 1$.
Rotation von y um die x-Achse, lässt die grüne Fläche rotieren. Darum $V_x = \pi \int_1^2 3dx - \pi \int_1^2 y^2 dx$!

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V_x = \pi \int_1^2 3dx - \pi \int_1^2 \left(x^2 - 1\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(3 - x^4 + 2x^2 - 1\right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + 2x \right]_1^2 = \pi \left(-\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 2 \right) \right)$$

$$= \pi \left(-\frac{31}{5} + \frac{14}{3} + 2 \right) = \pi \left(-\frac{93}{15} + \frac{70}{15} + \frac{30}{15} \right) = \underline{\underline{\frac{7}{15}\pi}}$$

Aufgabe 4: Folgen und Reihen

Entwickeln Sie $f(x) = e^{-x}$ als MacLaurin-Reihe. (SS2015)

a) Ermitteln Sie die Reihe über die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$.

Lösung:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

b) Bestimmen Sie die Reihe für *f(x)* aus der bekannten Reihe $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Lösung:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

c) Ermitteln Sie den Konvergenzradius *R* der Reihe.

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{(-x)^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)} \right| = 0$$

$$immer\ kleiner\ 1\ darum\quad R = \infty$$