Aufgabe 1: Integrationsverfahren

Lösen Sie die folgenden Integrale mit einem geeigneten Verfahren:

a) $\int xe^{-x}$

Lösung:

$\int xe^{-x}$ $\quad u = x \quad u' = 1 \quad v = -e^{-x} \quad v = e^{-x}$

$$\int xe^{-x} = -xe^{-x} - \int -e^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

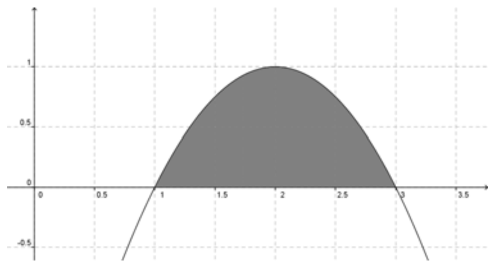
Lösung:

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx \quad u = \frac{x^2}{2} \quad \frac{du}{dx} = x$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(u) du = -\cos(u)\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = -\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

Aufgabe 2: Flächen- und Volumenberechnung

Der Graph der Funktion $f(x) = -(x-2)^2 + 1$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.



a) Berechnen Sie die eingeschlossene Fläche.

b) Berechnen Sie das Volumen das durch Rotation der Fläche um die Achse y=1 entsteht

Lösung:

a) $F = \int_1^3 -(x-2)^2 + 1dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\Big|_1^3 = \frac{4}{3}$

b) Rotation um y=1 entspricht Rotation um x-Achse der um eins nach unten verschobenen Kurve.

$$V = \pi\int_1^3 1dx - \pi\int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 4\right)^2 dx = 2\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi$$

Aufgabe 3: Reihen

Gegeben sei die Reihe $R = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n}$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die Reihe konvergiert.
b) Ermitteln Sie die Fehlergrenze, wenn die Reihe mit den ersten fünf Gliedern angenähert wird.

Lösung:

a) $\int xe^{-x} = -e^{-x}(x+1) + C$ siehe 1a)

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\mapsto\infty} -e^{-x}(x+1)\Big|_1^t = \lim_{t\mapsto\infty} \frac{(x+1)}{-e^x}\Big|_1^t = \lim_{t\mapsto\infty} \frac{(t+1)}{-e^t} - \frac{(1+1)}{-e^1} = \lim_{t\mapsto\infty} \frac{(t+1)}{-e^t} + \frac{2}{e}$$

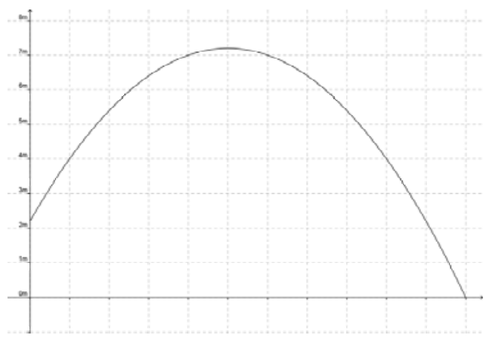
$$\overset{DLH}{=} \lim_{t\mapsto\infty} \frac{1}{-e^t} + \frac{2}{e} = 0 + \frac{2}{e} \Rightarrow \quad \textit{konvergent}$$

b) $\int_5^{\infty} xe^{-x}dx \geq F \geq \int_6^{\infty} xe^{-x}dx \Rightarrow \quad \frac{6}{e^5} \geq F \geq \frac{7}{e^6}$

Aufgabe 4: parametrisierte Funktionen

Ein Leichtathlet wirft einen Ball aus 2,2m Höhe in einem Winkel von 45° zur Erdoberfläche. Der Abwurf erfolgt mit einer Geschwindigkeit von $\sqrt{200}\, m/s$. Die Flugbahn ist in nebenstehender Abbildung dargestellt.
Die Flugbahn ist in parametrisierter Form gegeben.

$$x(t) = 10t \qquad y(t) = -5t^2 + 10t + \frac{11}{5}$$



a) Nach welcher Zeit erreicht der Ball den höchsten Punkt der Flugbahn? Wie hoch liegt der Punkt über der Erdoberfläche?
b) Nach welcher Zeit trifft der Ball auf die Erdoberfläche? Wie weit wurde der Ball geworfen?
c) Berechnen Sie die zwischen der Flugbahn und der Erdoberfläche eingeschlossene Fläche.

Lösung:

a) Aus der Skizze sieht man, dass es nur einen Hochpunkt gibt, zweite Ableitung also nicht nötig.

$$\textit{Maximum}: \qquad y' = 0 \qquad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-10t + 10}{10} = -t + 1$$

$$-t + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1 \qquad y(1) = -5 + 10 + \frac{11}{5} = 7{,}2$$

Nach einer Sekunde erreicht der Ball die maximale Höhe von 7,2 m.

b) Schnittpunkt mit der x-Achse bei $y = 0$

$$y(t) = -5t^2 + 10t + \frac{11}{5} = 0 \qquad t^2 - 2t - \frac{11}{25} = 0 \qquad t_1 = -0{,}2 \qquad t_2 = 2{,}2$$

$$x(2{,}2) = 22$$

Nach 2,2 Sekunden erreicht der Ball die maximale Weite von 22 m.

c) $A = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}dt = \int_0^{2,2} \left(-5t^2 + 10t + \frac{11}{5}\right)10dt = \int_0^{2,2} \left(-50t^2 + 100t + 22\right)dt = 112{,}9$

Die Fläche entspricht 112,9m²

Aufgabe 5: Reihenentwicklung

Bestimmen Sie ausgehend von der MacLaurin- Reihe $R = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ durch Integration die MacLaurin- Reihe für die Funktion $f(x) = \ln|1-x|$

Lösung:

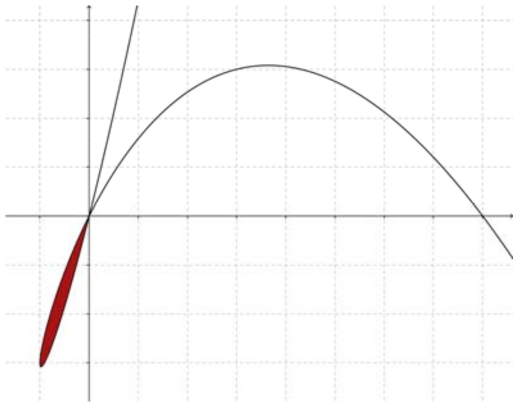
$$\int \frac{1}{1-x} = -\ln|1-x| \qquad \Rightarrow \qquad \int -\frac{1}{1-x} = \ln|1-x| = f(x) = -\int R$$

$$f(x) = -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Aufgabe 6: parametrisierte Funktionen

Eine Figur (siehe Abbildung) ist durch folgende Parameter-Funktionen gegeben:

$x = t^2 - 2t \qquad y = t^3 - 4t$



Berechnen Sie die eingeschlossene (farbig markierte) Fläche.

Lösung:

$Nullstellen:$

$y = 0 \quad t^3 - 4t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 0 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = -2$

$x(0) = 0 \qquad x(2) = 0 \qquad x(-2) = 8 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 \; und \; t_2$ sind die gesuchten Grenzen

$$F = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x} dt = \int_0^2 (t^3 - 4t) \cdot (2t-2) dt = \left| \frac{-8}{15} \right|$$